

# FORMLER TILL NATIONELLT PROV I MATEMATIK

## KURS C, D OCH E

### ALGEBRA

**Regler**

$$\left. \begin{aligned} (a+b)^2 &= a^2 + 2ab + b^2 \\ (a-b)^2 &= a^2 - 2ab + b^2 \end{aligned} \right\} \text{ (kvadreringsregler)}$$

$$(a+b)(a-b) = a^2 - b^2 \quad \text{(konjugatregeln)}$$

$$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

$$(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$$

$$a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 - ab + b^2)$$

$$a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2)$$

### Andrags- ekvationer

Ekvationen  $x^2 + px + q = 0$  har rötterna

$$x_1 = -\frac{p}{2} + \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q} \quad \text{och} \quad x_2 = -\frac{p}{2} - \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}$$

där  $x_1 + x_2 = -p$  och  $x_1 \cdot x_2 = q$

### ARITMETIK

#### Prefix

T	G	M	k	h	d	c	m	$\mu$	n	p
tera	giga	mega	kilo	hekto	deci	centi	milli	mikro	nano	piko
$10^{12}$	$10^9$	$10^6$	$10^3$	$10^2$	$10^{-1}$	$10^{-2}$	$10^{-3}$	$10^{-6}$	$10^{-9}$	$10^{-12}$

#### Potenser

För reella tal  $x$  och  $y$  och positiva tal  $a$  och  $b$  gäller

$$a^x a^y = a^{x+y} \quad \frac{a^x}{a^y} = a^{x-y} \quad (a^x)^y = a^{xy}$$

$$a^x b^x = (ab)^x \quad \frac{a^x}{b^x} = \left(\frac{a}{b}\right)^x \quad a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a}$$

$$a^{-x} = \frac{1}{a^x} \quad a^0 = 1$$

#### Logaritmer

För positiva tal  $x$  och  $y$  gäller:

$$10^x = y, \quad x = \lg y \quad e^x = y, \quad x = \ln y$$

$$\lg xy = \lg x + \lg y \quad \lg \frac{x}{y} = \lg x - \lg y$$

$$\lg x^p = p \cdot \lg x$$

#### Geometrisk summa

$$a + ak + ak^2 + \dots + ak^{n-1} = \frac{a(k^n - 1)}{k - 1} \quad \text{där } k \neq 1$$

# DIFFERENTIAL- OCH INTEGRALKALKYL

## Derivatans definition

$$f'(a) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

## Deriveringsregler

Funktion	Derivata
$x^a$ där $x$ är ett reellt tal	$ax^{a-1}$
$a^x$ ( $a > 0$ )	$a^x \ln a$
$\ln x$ ( $x > 0$ )	$\frac{1}{x}$
$e^x$	$e^x$
$e^{kx}$	$k \cdot e^{kx}$
$\frac{1}{x}$	$-\frac{1}{x^2}$
$\sin x$	$\cos x$
$\cos x$	$-\sin x$
$\tan x$	$1 + \tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$
$f(x) + g(x)$	$f'(x) + g'(x)$
$f(x) \cdot g(x)$	$f(x) \cdot g'(x) + f'(x) \cdot g(x)$
$\frac{f(x)}{g(x)}$ ( $g(x) \neq 0$ )	$\frac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{(g(x))^2}$

## Kedjeregeln

Om  $y = f(z)$  och  $z = g(x)$  är två deriverbara funktioner så gäller för den sammansatta funktionen  $y = f(g(x))$  att

$$y' = f'(g(x)) \cdot g'(x) \text{ eller } \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dz} \cdot \frac{dz}{dx}$$

## Några primitiva funktioner

$f(x)$	$F(x)$ ( $C$ är en reell konstant)
$k$	$kx + C$
$x^n$ ( $n \neq -1$ )	$\frac{x^{n+1}}{n+1} + C$
$\frac{1}{x}$ ( $x \neq 0$ )	$\ln x  + C$
$e^x$	$e^x + C$
$a^x$ ( $a > 0, a \neq 1$ )	$\frac{a^x}{\ln a} + C$
$\sin x$	$-\cos x + C$
$\cos x$	$\sin x + C$

## DIFFERENTIALEKVATIONER

### Homogena ekvationer

Av 1:a ordningen:  $y' + ay = 0$

Lösningarna kan skrivas  $y = Ce^{-ax}$

Av 2:a ordningen:  $y'' + ay' + by = 0$

Den karakteristiska ekvationen  $r^2 + ar + b = 0$  har rötterna  $r_1$  och  $r_2$

Om  $r_1$  och  $r_2$  är reella tal och  $r_1 = r_2$  så kan lösningarna skrivas

$$y = (C_1x + C_2)e^{r_1x}$$

Om  $r_1$  och  $r_2$  är reella tal och  $r_1 \neq r_2$  så kan lösningarna skrivas

$$y = C_1e^{r_1x} + C_2e^{r_2x}$$

Om  $r_1 = s + it$  och  $r_2 = s - it$  kan lösningarna skrivas

$$y = e^{sx}(C_1 \cos tx + C_2 \sin tx) = re^{sx} \cdot \sin(tx + \varphi)$$

### Inhomogena ekvationer

Generellt bestäms den allmänna lösningen som  $y = y_h + y_p$ , där  $y_p$  är en partikulärlösning till den inhomogena ekvationen och  $y_h$  den allmänna lösningen till motsvarande homogena ekvation.

Separabla differentialekvationer:  $g(y)y' = f(x)$

Löses enligt  $\int g(y)dy = \int f(x)dx$

## FUNKTIONSLÄRA

### Räta linjen

$$k = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

Riktningkoefficient för linje genom punkterna  $(x_1, y_1)$  och  $(x_2, y_2)$  där  $x_1 \neq x_2$

$$y = kx + m$$

Linje genom punkten  $(0, m)$  med riktningkoefficienten  $k$

$$y - y_1 = k(x - x_1)$$

Linje genom punkten  $(x_1, y_1)$  med riktningkoefficienten  $k$

$$k_1 \cdot k_2 = -1$$

Villkor för vinkelräta linjer

### Exponentialfunktioner

$$y = C \cdot a^x$$

$C$  och  $a$  är konstanter  
 $a > 0$  och  $a \neq 1$

### Potensfunktioner

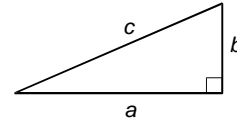
$$y = C \cdot x^a$$

$C$  och  $a$  är konstanter

## GEOMETRI

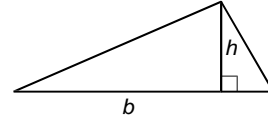
**Pythagoras sats**

$$a^2 + b^2 = c^2$$



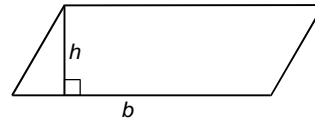
**Triangel**

$$\text{area} = \frac{bh}{2}$$



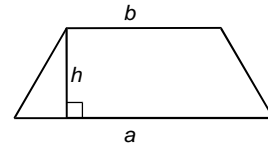
**Parallelogram**

$$\text{area} = bh$$



**Parallelltrapets**

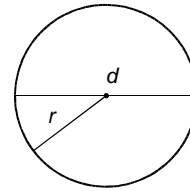
$$\text{area} = \frac{h(a+b)}{2}$$



**Cirkel**

$$\text{area} = \pi r^2 = \frac{\pi d^2}{4}$$

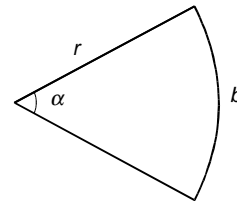
$$\text{omkrets} = 2\pi r = \pi d$$



**Cirkelsektor**

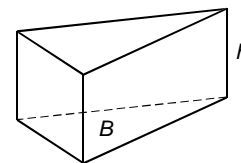
$$\text{bågen } b = \frac{\alpha}{360} \cdot 2\pi r$$

$$\text{area} = \frac{\alpha}{360} \cdot \pi r^2 = \frac{br}{2}$$



**Prisma**

$$\text{volym} = Bh$$

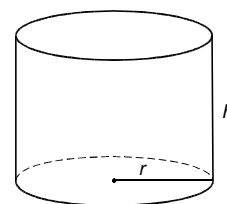


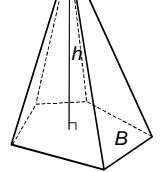
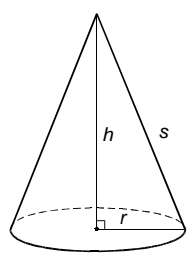
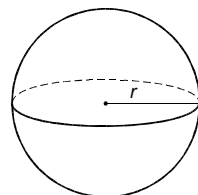
**Cylinder**

Rak cirkulär cylinder

$$\text{volym} = \pi r^2 h$$

$$\text{mantelarea} = 2\pi r h$$

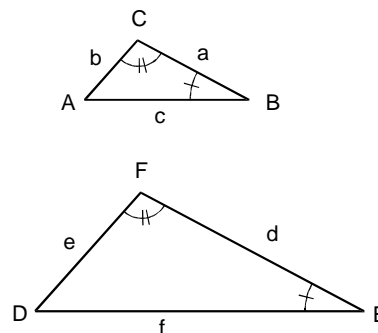


<b>Pyramid</b>	$\text{volym} = \frac{Bh}{3}$	
<b>Kon</b>	<p>Rak cirkulär kon</p> $\text{volym} = \frac{\pi r^2 h}{3}$ $\text{mantelarea} = \pi r s$	
<b>Klot</b>	$\text{volym} = \frac{4\pi r^3}{3}$ $\text{area} = 4\pi r^2$	

**Likformighet** För likformiga geometriska figurer gäller att motsvarande vinklar är lika stora och att förhållandet mellan motsvarande sidor är lika.

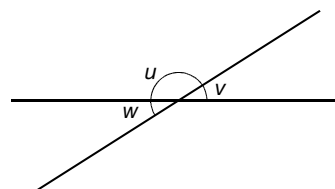
Triangelna ABC och DEF är likformiga.

$$\text{Då gäller } \frac{b}{e} = \frac{c}{f}$$

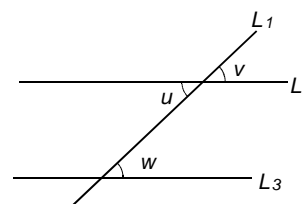


**Skala** Areaskalan = (Längdskalan)<sup>2</sup>      Volymskalan = (Längdskalan)<sup>3</sup>

**Vinklar** När två räta linjer skär varandra är sidovinklarnas summa 180° (t.ex.  $u + v = 180^\circ$ ) och vertikalvinklar lika stora (t.ex.  $w = v$ ).



När en linje  $L_1$  skär två andra inbördes parallella linjer  $L_2$  och  $L_3$  så är likbelägna vinklar lika stora (t.ex.  $v = w$ ) och alternatvinklar lika stora (t.ex.  $u = w$ ).



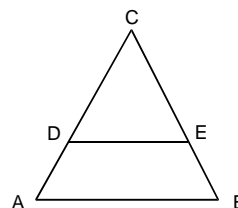
Omvänt gäller att om alternatvinklar eller likbelägna vinklar är lika stora så är linjerna  $L_2$  och  $L_3$  parallella.

**Topptriangel- och transversalsatsen**

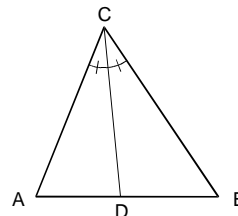
Om DE är parallell med AB gäller

$$\frac{DE}{AB} = \frac{CD}{AC} = \frac{CE}{BC} \text{ och}$$

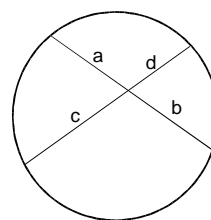
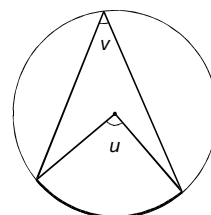
$$\frac{CD}{AD} = \frac{CE}{BE}$$

**Bisektrissatsen**

$$\frac{AD}{BD} = \frac{AC}{BC}$$

**Kordasatsen**

$$ab = cd$$

**Randvinkelsatsen**Medelpunktsvinkeln till en cirkelbåge är dubbelt så stor som randvinkeln till samma cirkelbåge ( $u = 2v$ )**KOMPLEXA TAL****Representation**
 $z = x + iy = re^{i\varphi} = r(\cos \varphi + i \sin \varphi)$  där  $x$ ,  $y$ ,  $r$  och  $\varphi$  är reella tal samt  $i^2 = -1$ 
**Argument**

$$\arg z = \varphi \quad \tan \varphi = \frac{y}{x}$$

**Absolutbeloppet**

$$|z| = r = \sqrt{x^2 + y^2}$$

**Konjugat**Talen  $z = x + iy$  och  $\bar{z} = x - iy$  kallas konjugerade tal**Räknelagar**

$$z_1 z_2 = r_1 r_2 (\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i \sin(\varphi_1 + \varphi_2)) = r_1 r_2 e^{i(\varphi_1 + \varphi_2)}$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2} (\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i \sin(\varphi_1 - \varphi_2)) = \frac{r_1}{r_2} e^{i(\varphi_1 - \varphi_2)}$$

**de Moivres formel**

$$z^n = (r(\cos \varphi + i \sin \varphi))^n = r^n (\cos n\varphi + i \sin n\varphi)$$

**Eulers formler**

$$e^{iy} = \cos y + i \sin y$$

$$\cos y = \frac{e^{iy} + e^{-iy}}{2} \quad \sin y = \frac{e^{iy} - e^{-iy}}{2i}$$

## NUMERISKA METODER

**Ekvationslösning** Newton-Raphsons iterationsformel:  $x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$

### Integraler

Intervall  $a_0 \leq x \leq a_n$  delas in i  $n$  delintervall.

Mittpunkten i varje delintervall betecknas  $x_1, x_2, \dots, x_n$

Rektangelmetoden:  $\int_{a_0}^{a_n} f(x)dx = \frac{a_n - a_0}{n} (f(x_1) + f(x_2) + \dots + f(x_n))$

Trapetsmetoden:  $\int_{a_0}^{a_n} f(x)dx = \frac{a_n - a_0}{2n} (f(a_0) + 2f(a_1) + 2f(a_2) + \dots + 2f(a_{n-1}) + f(a_n))$

### Differential- ekvationer

$y' = f(x, y)$ , steglängd  $h$

Eulers metod (tangentsmetoden):  $y_{n+1} = y_n + h \cdot f(x_n, y_n)$

Mittpunktsmetoden:  $y_{n+1} = y_n + h \cdot f\left(x_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{h}{2} \cdot k\right)$  där  $k = f(x_n, y_n)$

## TRIGONOMETRI

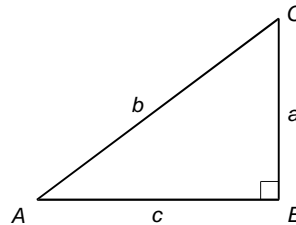
### Definitioner

$ABC$  är en rätvinklig triangel.

$$\sin A = \frac{a}{b} \left( \frac{\text{motstående katet}}{\text{hypotenusan}} \right)$$

$$\cos A = \frac{c}{b} \left( \frac{\text{närliggande katet}}{\text{hypotenusan}} \right)$$

$$\tan A = \frac{a}{c} \left( \frac{\text{motstående katet}}{\text{närliggande katet}} \right)$$



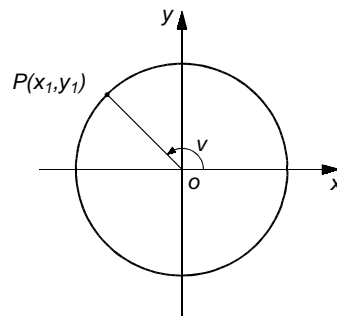
$OP$  är radie i en enhetscirkel.

Koordinaterna för  $P$  är  $(x_1, y_1)$

$$\sin v = y_1$$

$$\cos v = x_1$$

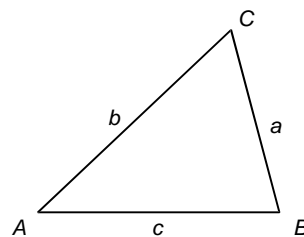
$$\tan v = \frac{y_1}{x_1}$$



**Sinussatsen**  $\frac{\sin A}{a} = \frac{\sin B}{b} = \frac{\sin C}{c}$

**Cosinussatsen**  $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$

**Areasatsen**  $\text{arean} = \frac{ab \sin C}{2}$



**Trigonometriska  
formler**

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$$

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta$$

$$\sin(\alpha - \beta) = \sin \alpha \cos \beta - \cos \alpha \sin \beta$$

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta$$

$$\cos(\alpha - \beta) = \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta$$

$$\tan(\alpha + \beta) = \frac{\tan \alpha + \tan \beta}{1 - \tan \alpha \tan \beta}$$

$$\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha$$

$$\cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha = 2 \cos^2 \alpha - 1 = 1 - 2 \sin^2 \alpha$$

$$\sin^2 \frac{\alpha}{2} = \frac{1 - \cos \alpha}{2} \quad \cos^2 \frac{\alpha}{2} = \frac{1 + \cos \alpha}{2}$$

$$a \sin x + b \cos x = c \sin(x + \nu) \quad \text{där } c = \sqrt{a^2 + b^2} \quad \text{och } \tan \nu = \frac{b}{a}$$

**Exakta  
värden**

Vinkel $\nu$ (grader)	0°	30°	45°	60°	90°	120°	135°	150°	180°
(radianer)	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	$\pi$
$\sin \nu$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\cos \nu$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1
$\tan \nu$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	Ej def.	$-\sqrt{3}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	0