

## Kapitel 4.1

4101, 4102, 4103, 4104 Exempel som löses i boken.

4105 a)  $a_n = 3n - 2 \rightarrow$   
 $a_1 = 3 \cdot 1 - 2 = 1$   
 $a_2 = 3 \cdot 2 - 2 = 4$   
 $a_3 = 3 \cdot 3 - 2 = 7$   
 $a_4 = 3 \cdot 4 - 2 = 10$

b)  $a_n = \frac{2n}{n+1} \rightarrow$   
 $a_1 = \frac{2 \cdot 1}{1+1} = \frac{2}{2} = 1$   
 $a_2 = \frac{2 \cdot 2}{2+1} = \frac{4}{3}$   
 $a_3 = \frac{2 \cdot 3}{3+1} = \frac{6}{4} = \frac{3}{2}$   
 $a_4 = \frac{2 \cdot 4}{4+1} = \frac{8}{5}$

4106 a)  $a_{n+1} = 2a_n + 3, \quad a_1 = 6$   
 $a_2 = 2 \cdot 6 + 3 = 15$   
 $a_3 = 2 \cdot 15 + 3 = 33$   
 $a_4 = 2 \cdot 33 + 3 = 69$   
 $a_5 = 2 \cdot 69 + 3 = 141$

b)  $a_{n+1} = a_n + n, \quad a_1 = 5$   
 $a_2 = 5 + 1 = 6$   
 $a_3 = 6 + 2 = 9$   
 $a_4 = 9 + 3 = 12$   
 $a_5 = 12 + 4 = 16$

4107 Se bokens ledning. Kontakta din lärare om du behöver mer hjälp.

4108 a)  $\left. \begin{array}{l} a_n = 3 \cdot 2^{n-1} \\ n = 12 \end{array} \right\} \rightarrow a_{12} = 3 \cdot 2^{11} = 6144$

b)  $\left. \begin{array}{l} a_n = 5 \cdot 0,5^{n-1} \\ n = 12 \end{array} \right\} \rightarrow a_{12} = 5 \cdot 0,5^{11} = 5 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{11} = \frac{5}{2^{11}} = \frac{5}{2048} \approx 2,4 \cdot 10^{-3}$

4109 Se facit och uppgift 4108. Kontakta din lärare om du behöver mer hjälp.

4110 Se bokens ledning. Kontakta din lärare om du behöver mer hjälp.

4111  $a_{n+1} = (a_n - 2)^2, \quad a_1 = 5$   
 $a_2 = (5 - 2)^2 = 3^2 = 9$   
 $a_3 = (9 - 2)^2 = 7^2 = 49$   
 $a_4 = (49 - 2)^2 = 47^2 = 2209$

4112 a)  $a_{n+2} = a_{n+1} + a_n, \quad a_1 = 1 \quad a_2 = 2$   
 $a_3 = a_2 + a_1 = 2 + 1 = 3$   
 $a_4 = a_3 + a_2 = 3 + 2 = 5$   
 $a_5 = a_4 + a_3 = 5 + 3 = 8$

b)  $a_{n+2} = \frac{a_{n+1}}{a_n} \quad a_1 = 1 \quad a_2 = 3$

$$a_3 = \frac{a_2}{a_1} = \frac{3}{1} = 3$$

$$a_4 = \frac{a_3}{a_2} = \frac{3}{3} = 1$$

$$a_5 = \frac{a_4}{a_3} = \frac{1}{3}$$

**4113** Om du har andra lösningar än de i facit kan du kontakta din lärare om du vill diskutera dina lösningsförslag. Kan du hitta någon rekursionsformel som ger samma talföljd?

**4114** Se bokens ledning och lösningsförslag i facit.

**4115** Se lösningen i facit.

**4116** Rekursionsformeln kan skrivas om som vilken formel som helst:

$$a_{n+1} = a_n + 2 \quad \rightarrow \quad a_n = a_{n+1} - 2$$

Med hjälp av den ”nya” formeln kan vi beräkna det föregående talet i talföljden.

$$a_3 = a_4 - 2 = 14 - 2 = 12$$

$$a_2 = a_3 - 2 = 12 - 2 = 10$$

$$a_1 = a_2 - 2 = 10 - 2 = 8$$

**4117** Se lösningen i facit.

**4118** Se bokens ledning. Kontakta din lärare om du behöver mer hjälp eller vill diskutera ditt lösningsförslag.

**4119** Kontakta din lärare om du behöver mer hjälp eller vill diskutera ditt lösningsförslag.

**4120** Se bokens ledning och lösningsförslag i facit.

**4121** Lös ekvationen  $100 - 3n > 5$ . Tänk på att  $n$  skall vara ett heltal.

$$-3n > 95$$

$$3n < 95$$

$$n < 31\frac{2}{3} < 32$$

**4122, 4123** Se bokens ledning och lösningsförslag i facit.

**4124** Se bokens ledning. Kontakta din lärare om du behöver mer hjälp.

**4125** Se bokens ledning och lösningsförslag i facit.

## Kapitel 4.2

4201 Exempel som löses i boken.

4202 a)  $a_1 = 80$ ,  
 $a_2$  är 10 större än  $a_1$ ,  
 $a_3$  är 10 större än  $a_2$  osv  
 $\rightarrow$  mönstret är  $a_n = 80 + (n-1)10$   
 $a_1 = 80 + 0 \cdot 10 = 80$   
 $a_2 = 80 + 1 \cdot 10 = 90$   
 $a_3 = 80 + 2 \cdot 10 = 100$   
 $a_4 = 80 + 3 \cdot 10 = 110$   
 $a_5 = 80 + 4 \cdot 10 = 120$

b) Mönstret är  $a_n = 20 + (n-1)4$   
 $a_1 = 20 + 0 \cdot 4 = 20$   
 $a_2 = 20 + 1 \cdot 4 = 24$   
 $a_3 = 20 + 2 \cdot 4 = 28$   
 $a_4 = 20 + 3 \cdot 4 = 32$   
 $a_5 = 20 + 4 \cdot 4 = 36$

4203 a)  $a_1 = 18$ ,  $a_2$  är 3 större än  $a_1$ ,  $a_3$  är 3 större än  $a_2$  osv  
 $\rightarrow$  mönstret är  $a_n = 18 + (n-1)3$   
 $a_{12} = 18 + 11 \cdot 3 = 51$

b) Mönstret är  $a_n = 70 - (n-1)5$   
 $a_{12} = 70 - 11 \cdot 5 = 15$

4204 Använd summaformeln  $s_n = \frac{n(a_1 + a_n)}{2}$

a)  $a_1 = 4 + 0 \cdot 2 = 4$   
 $a_{60} = 4 + 59 \cdot 2 = 122$  }  $\rightarrow s_{60} = \frac{60 \cdot (4 + 122)}{2} = 3780$

b)  $a_1 = 6 + 0 \cdot 3 = 6$   
 $a_{60} = 6 + 59 \cdot 3 = 183$  }  $\rightarrow s_{60} = \frac{60 \cdot (6 + 183)}{2} = 5670$

4205 Se bokens ledning.

4206 a)  $4 + 4(n-1) = 256$   
 $4 + 4n - 4 = 256$   
 $4n = 256$   
 $n = 64$

b)  $1024 - 8(n-1) = 256$   
 $1024 - 8n + 8 = 256$   
 $8n = 776$   
 $n = 97$

4207 Se bokens ledning och lösningsförslag i facit.

4208, 4209, 4210 Se bokens ledning.

4211 Se lösningsförslaget i boken.

4212 Exempel som löses i boken.

4213 a)  $a_n = a_1 k^{n-1}$ ,  $k = \frac{a_2}{a_1} = 3$   
 $a_1 = 8 \cdot 3^0 = 8$   
 $a_2 = 8 \cdot 3^1 = 24$   
 $a_3 = 8 \cdot 3^2 = 72$   
 $a_4 = 8 \cdot 3^3 = 216$   
 $a_5 = 8 \cdot 3^4 = 648$

b)  $a_n = 80 \cdot 0,5^{n-1}$   
 $a_1 = 80 \cdot 0,5^0 = 80$   
 $a_2 = 80 \cdot 0,5^1 = 40$   
 $a_3 = 80 \cdot 0,5^2 = 20$   
 $a_4 = 80 \cdot 0,5^3 = 10$   
 $a_5 = 80 \cdot 0,5^4 = 5$

4214 a)  $a_n = a_1 k^{n-1}$ ,  $k = \frac{a_2}{a_1} = 0,25$   
 $a_1 = 256 \cdot 0,25^0 = 256$   
 $a_4 = 256 \cdot 0,25^3 = 4$

b)  $a_n = a_1 k^{n-1} = 100 \cdot 0,4^{n-1}$   
 $a_4 = 100 \cdot 0,4^3 = 6,4$

4215 a)  $k = 3$   
 $a_1 = 4$   
 $s_n = \frac{a_1(k^n - 1)}{k - 1} \rightarrow$   
 $s_{10} = \frac{4(3^{10} - 1)}{3 - 1} = 118096$

b)  $k = 1,05$   
 $a_1 = 1000$   
 $s_n = \frac{a_1(k^n - 1)}{k - 1} \rightarrow$   
 $s_{10} = \frac{1000(1,05^{10} - 1)}{1,05 - 1} \approx 12578$

4216 Se bokens ledning och lösningsförslag i facit.

4217 Se bokens ledning.

4218 a) Talföljden innehåller 14 termer  
 $k = 1,02$   
 $a_1 = 10$   
 $s_n = \frac{a_1(k^n - 1)}{k - 1} \rightarrow$   
 $s_{14} = \frac{10(1,02^{14} - 1)}{1,02 - 1} \approx 160$

b) Talföljden innehåller 8 termer  
 $k = 0,8$   
 $a_1 = 1000$   
 $s_n = \frac{a_1(k^n - 1)}{k - 1} \rightarrow$   
 $s_8 = \frac{1000(0,8^8 - 1)}{0,8 - 1} \approx 4161$

4219 Se bokens ledning.

4220 Se lösningsförslaget i boken.

4221, 4222 Se bokens ledning och lösningsförslag i facit.

4223 Se lösningsförslaget i boken.

## Kapitel 4.3

4301, 4302 Exempel som löses i boken.

4303 a)  $k = 1,07$

$$a_1 = 350$$

$$s_n = \frac{a_1(k^n - 1)}{k - 1} \rightarrow$$

$$s_{10} = \frac{350(1,07^{10} - 1)}{1,07 - 1} \approx 4836$$

b)  $k = 0,88$

$$a_1 = 5000$$

$$s_n = \frac{a_1(k^n - 1)}{k - 1} \rightarrow$$

$$s_{10} = \frac{5000(0,88^{10} - 1)}{0,88 - 1} \approx 30062$$

4304 Se bokens ledning och lösningsförslag i facit.

4305 I denna uppgift gäller att  $a_1 = 10000$

$$\left. \begin{array}{l} \text{a) } k = 1,03 \\ n = 10 \\ s_n = a_1(k^n - 1)/(k - 1) \end{array} \right\} \rightarrow s_{10} = \frac{10000(1,03^{10} - 1)}{1,03 - 1} \approx 114639$$

$$\left. \begin{array}{l} \text{b) } k = 1,05 \\ n = 7 \\ s_n = a_1(k^n - 1)/(k - 1) \end{array} \right\} \rightarrow s_7 = \frac{10000(1,05^7 - 1)}{1,05 - 1} \approx 81420$$

$$\left. \begin{array}{l} \text{c) } k = 1,11 \\ n = 5 \\ s_n = a_1(k^n - 1)/(k - 1) \end{array} \right\} \rightarrow s_5 = \frac{10000(1,11^5 - 1)}{1,11 - 1} \approx 62278$$

4306  $100000 \cdot 1,06^6 \cdot 1,08^4 \approx 192988$

4307 a) Idag skall man betala 75000 kr samt ett belopp  $x$  kr som med 8,5% årlig ränta är värt 25000 kr om fem år. Beräkna först vad  $x$  är:

$$x \cdot 1,085^5 = 25000$$

$$x = \frac{25000}{1,085^5} \approx 16626$$

Man skall betala  $(75000 + 16626)$  kr = 91626 kr

b) Enligt detta alternativ lånar man 75000 kr i 5 fem år. Man skall därför betala ett lån på 75000 kr + 8,5% årlig ränta på ränta för det lånet + 25000 kr.

$$\rightarrow (75000 \cdot 1,085^5 + 25000) \text{ kr} \approx 137774 \text{ kr}$$

4308, 4309 Se bokens ledning och lösningsförslag i facit.

**4310** Undersök hur mycket pengar man har i början av år 2000 för de tre alternativen.

a) Här får man ränta i slutet av år 1993, 1994, 1995, 1996, 1997, 1998 och 1999. I början av år 2000 har man lika mycket pengar som i slutet av 1999. Vad är 6000 värt efter 7 år om den årliga räntan är 6%?

$$6000 \cdot 1,067 \approx 9022$$

b) Här fick man 9000 kr i början av 2000.

c) Enligt detta alternativ får man 1000 kr i början av 1993, 1994, 1995, 1996, 1997, 1998, 1999 och 2000, alltså vid åtta tillfällen. Pengarna man fick i början av 1993 är i början av 2000 värda  $1000 \cdot 1,06^7$  kr, de man fick 1994 är värda  $1000 \cdot 1,06^6$  kr osv. Det totala värdet är alltså summan av en geometrisk serie där första termen är 1000, kvoten är 1,06 och antalet termer är 8.

$$\left. \begin{array}{l} a_1 = 1000 \\ k = 1,06 \\ n = 8 \\ s_n = a_1(k^n - 1)/(k - 1) \end{array} \right\} \rightarrow s_8 = \frac{1000(1,06^8 - 1)}{1,06 - 1} \approx 9897$$

Alternativ c är det bästa alternativet

**4311** Se bokens ledning och lösningsförslag i facit.

**4312** Sätt att nuvärdet är  $x$  kr. Om den årliga räntan är 5% är och motsvarar nuvärdet  $x \cdot 1,05^y$  kr om  $y$  år, dvs ekvationen  $x \cdot 1,05^5 = 8000$  skall lösas.

$$\rightarrow x = \frac{8000}{1,05^5} \approx 6268$$

**4313, 4314** Se bokens ledning och lösningsförslag i facit.

**4315** Exempel som löses i boken.

**4316** a) När Niklas tagit den första tabletten har han 200 mg av substansen i kroppen, när han just tagit den andra tabletten har han  $(200 \cdot 0,05 + 200)$  mg i kroppen. Direkt efter den tredje tabletten har han  $(200 \cdot 0,05 + 200) \cdot 0,05 + 200$  mg i kroppen. Då det inte är fler termer än tre kan man lätt räkna ut uttrycket ovan utan att använda summaformeln, men eftersom detta kapitel handlar mycket om att träna på att beräkna summor av geometriska talföljder är det bra att använda formeln även här.

$$\left. \begin{array}{l} s_n = \frac{a_1(k^n - 1)}{k - 1} \\ a_1 = 200 \\ k = 0,05 \\ n = 3 \end{array} \right\} \rightarrow s_3 = \frac{200(0,05^3 - 1)}{0,05 - 1} = 210,5 \approx 211$$

$$\begin{array}{l}
 \text{b)} \\
 \left. \begin{array}{l}
 s_n = \frac{a_1(k^n - 1)}{k - 1} \\
 a_1 = 200 \\
 k = 0,05 \\
 n = 10
 \end{array} \right\} \rightarrow s_{10} = \frac{200(0,05^{10} - 1)}{0,05 - 1} \approx 210,53 \approx 211
 \end{array}$$

$$\begin{array}{l}
 \text{4317} \\
 \left. \begin{array}{l}
 s_n = \frac{a_1(k^n - 1)}{k - 1} \\
 a_1 = 1,8 \\
 k = 1/3 \\
 n = 10
 \end{array} \right\} \rightarrow s_{10} = \frac{200((1/3)^{10} - 1)}{(1/3) - 1} \approx 2,7
 \end{array}$$

4318 Se bokens ledning och lösningsförslag i facit.

4319 Beräkna summan  $1 \cdot 2^0 + 1 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^2 + \dots + 1 \cdot 2^{63}$  för att ta reda på antalet korn.

$$\begin{array}{l}
 \left. \begin{array}{l}
 s_n = \frac{a_1(k^n - 1)}{k - 1} \\
 a_1 = 1 \\
 k = 2 \\
 n = 64
 \end{array} \right\} \rightarrow s_{64} = \frac{1(2^{64} - 1)}{2 - 1} = 2^{64} - 1 \approx 1,84 \cdot 10^{19}
 \end{array}$$

Antalet korn är ca  $1,8 \cdot 10^{19}$  st.. Det motsvarar  $(1,8 \cdot 10^{19} \cdot 3 \cdot 10^{-5}) \text{ kg} \approx 5,5 \cdot 10^{14} \text{ kg}$  som i sin tur motsvarar  $\frac{5,5 \cdot 10^{14}}{2 \cdot 10^{12}} \text{ år} \approx 300 \text{ år}$

4320 Se bokens ledning och lösningsförslag i facit.

4321 a) Bollen faller först 6,5 m, studsar upp  $6,5 \cdot 0,8$  m, faller ner  $6,5 \cdot 0,8$  m, upp  $6,5 \cdot 0,8^2$  m, ner lika långt osv. Den sammanlagda sträckan blir alltså

$$\begin{aligned}
 &6,5 + 13 \cdot 0,8 + 13 \cdot 0,8^2 + 13 \cdot 0,8^3 + 13 \cdot 0,8^4 = \\
 &13 \cdot 0,8^0 + 13 \cdot 0,8 + 13 \cdot 0,8^2 + 13 \cdot 0,8^3 + 13 \cdot 0,8^4 - 6,5
 \end{aligned}$$

$$\begin{array}{l}
 \left. \begin{array}{l}
 s_n = \frac{a_1(k^n - 1)}{k - 1} \\
 a_1 = 13 \\
 k = 0,80 \\
 n = 5
 \end{array} \right\} \rightarrow s_5 = \frac{13(0,80^5 - 1)}{0,80 - 1} - 6,5 \approx 37,2
 \end{array}$$

$$\begin{array}{l}
 \text{b)} \\
 \left. \begin{array}{l}
 s_n = \frac{a_1(k^n - 1)}{k - 1} \\
 a_1 = 13 \\
 k = 0,80 \\
 n = 25
 \end{array} \right\} \rightarrow s_{25} = \frac{13(0,80^{25} - 1)}{0,80 - 1} - 6,5 \approx 58,2
 \end{array}$$

4322, 4323, 4324 Se bokens ledning och lösningsförslag i facit.

## Kapitel 4.4

4401 Exempel som löses i boken.

4402,4403 Se bokens ledning.

4404 **Tips:** Gör b-uppgiften först, givetvis i Excel eller något annat kalkylprogram. Kontakta din lärare om du behöver hjälp.

4405 Se bokens ledning.

4406 Exempel som löses i boken.

4407 Se facit. Kontakta din lärare om du behöver hjälp.

4408, 4409 Se lösningsförslaget i facit.

4410 Exempel som löses i boken.

4411 Se bokens ledning och lösningsförslag i facit.

4412 a)  $95 \cdot 0,88^4$       b) Lös  $95 \cdot 0,88^x < 20$   
Se facit. Kontakta din lärare om du behöver hjälp.

4413, 4414 Se facit. Kontakta din lärare om du behöver hjälp.

4415 Se bokens ledning och lösningsförslag i facit.

4416 Se facit. Kontakta din lärare om du behöver hjälp.

4417 Se lösningsförslaget i facit.

4418 Se facit. Kontakta din lärare om du behöver hjälp.

4419 Se bokens ledning.

4420, 4421 Se facit. Kontakta din lärare om du behöver hjälp.

4422, 4423 Se bokens ledning och lösningsförslag i facit.